HAUTE ECOLE DE LA PROVINCE DE LIEGE

Enseigner l'Analyse en utilisant les Méthodes non standard

Service de Mathématiques de l'ISIL, responsable André Pétry

Introduction

L'Analyse non standard a été introduite en 1961 par A. Robinson. Elle permet de donner un cadre rigoureux et solide aux arguments et méthodes infinitésimales, elle introduit les différents concepts de l'Analyse mathématique (dérivées, intégrales...) en utilisant la notion de nombres infiniment petits et cela dans la tradition initiée par les savants des 17e et 18e siècles.

Quelques expériences d'enseignement de l'Analyse recourant aux méthodes de l'Analyse non standard sont menées. C'est le cas au département Ingénieurs Industriels (ISIL) de la Haute Ecole de la Province de Liège et cela depuis plus de dix ans. Le responsable de cette expérience originale d'enseignement est le Professeur André Pétry qui entouré et aidé d'une équipe de trois mathématiciens a développé ce projet. Ce travail s'accompagne de diverses publications scientifiques et a bénéficié en 2006 et 2007 d'un subside du Fonds de la Recherche Fondamentale et Collective (FRFC) dans le cadre de la convention G.4549.06 (intitulé « *Etude de la dualité entre compétences langagières et compétences mathématiques dans le cadre des activités d'apprentissage lors de la transition secondaire-université dans les cours de mathématiques en première année d'université* »).

Quelques mots à propos de l'Analyse non standard

En Analyse non standard on considère plus de nombres que dans les réels, on se place dans une extension des nombres réels, les nombres formant cet extension sont appelés les nombres *hyperréels*. Les réels se retrouvent ainsi parmi les hyperréels. On peut additionner, soustraire, multiplier et diviser dans les hyperréels comme on le faisait déjà parmi les réels, on peut aussi comparer ces nombres comme auparavant.

Mais parmi les hyperréels il y a des nombres non réels et notamment des nombres infiniment petits non nuls. *Un infiniment petit est un nombre qui en valeur absolue est inférieur à tout réel>0*. Parmi les nombres réels le seul infiniment petit est 0

Il existe également des nombres *infiniment grands* c'est-à-dire des nombres qui en valeur absolue sont supérieurs à tout réel. Aucun réel ne peut évidemment être infiniment grand.

Tout nombre qui n'est pas infiniment grand est qualifié de *limité*. Tous les réels sont ainsi des nombres limités. Les nombres limités qui ne sont pas infiniment petits sont dits *appréciables*.

Par exemple si ♏ est un infiniment petit non nul,
- le nombre 2 + ♏ est appréciable,
- l'inverse de ♏ est un infiniment grand,
- le nombre 10^6♏ est encore infiniment petit.

Deux nombres sont *infiniment proches* lorsque leur différence est infiniment petite. Par exemple si ♏ est un infiniment petit, le nombre 2 + ♏ est infiniment proche de 2.

Le *halo* d'un réel r est l'ensemble de tous les hyperréels infiniment proches de r , on le représente comme sur la figure ci-contre.

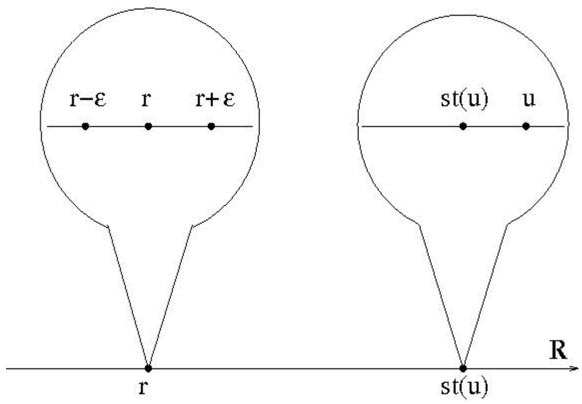
Deux réels infiniment proches sont égaux et tout nombre infiniment proche d'un réel est un limité. De plus, tout nombre limité u est infiniment proche d'un et d'un seul réel appelé la *partie standard* de u, en abrégé st(u). Ainsi la partie standard de 2 + e est 2.

On peut ainsi se représenter les nombres hyperréels comme suit:
- les nombres limités sont les nombres qui apparaissent dans les halos de tous les réels,
- les infiniment grands positifs sont supérieurs à tous les limités,
- les infiniment grands négatifs sont inférieurs à tous les limités.

Les nombres infiniment petits n'ont rien ici de quantités idéales comme le considérait Leibniz au 17e siècle, mais sont des nombres dont des mathématiciens du 20e siècle (dont A. Robinson) ont prouvé l'existence.

Pourquoi utiliser l'Analyse non standard au niveau de l'enseignement

Les raisons sont multiples mais se conjuguent pour donner un enseignement des Mathématiques plus intuitif, plus inventif et en prise directe avec les applications:
- La notion de nombres infinitésimaux a un contenu intuitif indiscutable, cela donne aux notions sous-jacentes et fondamantales (dérivées, intégrales ...) plus de clarté, plus de sens, cela permet l'utilisation d'un langage plus simple et plus naturel.



- On peut traiter très simplement des problèmes d'ordre de grandeur, car les nombres hyperréels contiennent en eux-même des ordres de grandeur absolus (infiniment petit, appréciable, infiniment grand) dont on peut déduire très aisément des ordres de grandeur relatifs, par exemple si u, v sont des nombres, on dit que u est négligeable par rapport à v lorsque la fraction u/v est infiniment petite.
- L'outil mathématique ainsi construit est directement utilisable dans les diverses sciences (qui ont toujours continué à utiliser le langage et les notions infinitésimales); ainsi, moyennant un peu de concertation, le langage mathématique du mathématicien peut coïncider avec celui des utilisateurs de Mathématiques.
- La complexité logique des notions de base est fortement simplifiée (ainsi dans la définition de la limite, on supprime deux quantifications), il s'ensuit que les preuves sont également simplifiées et deviennent bien plus naturelles: les démonstrations se font en suivant l'esprit d'invention, le formalisme diminue fortement et la place du langage augmente.

Contact, références ...

Contact: apetry@prov-liege.be
Pour en savoir plus ...: http://www.isil.be/math/recherche

Quelques références:

M. Boffa et A. Pétry, Des naturels non standard à l'Analyse non standard, une introduction, Mathématique et Pédagogie, vol. 94, 1993, pp. 39-54.

H.J. Keisler, Foundations of Infinitesimal Calculus, Prindle, Weber and Schmidt, 1977.

A. Pétry, Balade en Analyse non standard sur les traces de A. Robinson, dans 'Non standard analysis', Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 1996.

A. Pétry, Enseigner l'Analyse sur base des méthodes non standard, deux aspects: microscope et ensembles dans ``Logique dans l'enseignement des Mathématiques'', Belgian Mathematical Society, vol. 5, nº5, supplément, 45-62.

A. Pétry, A propos des tangentes à une courbe, une présentation non standard dans ``A tribute to Maurice Boffa", Belgian Mathematical Society, décembre 2001, 155-166.

A. Pétry, note de cours Analyse infinitésimale, vol.1-4, Ed. Imprisil.

A. Robinson, Non-standard analysis , Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64, 1961, 432-440.